

Oefeningen Wiskunde II

Oefeningen bij de cursus Wiskunde II
van Dr. P. Bocher

Dr. Maria-Cristina Ciocci
maria-cristina.ciocci@howest.be

Academie jaar 2010-2011

Met dank aan C. Crommelinck

Inhoudsopgave

1	Reële functies van twee variabelen	1
1.1	Partieel afleiden	1
1.2	Totaal differentiaal	2
1.3	Extremum onderzoek	3
1.4	Toepassingen	3
1.5	Opmerkingen	5
2	Dubbel integralen	7
2.1	Opmerking: het bepalen van de integratiegrenzen in dubbel- integralen	7
2.2	Opgaven	8
2.3	Volume berekeningen voor cilindervormige lichamen	10
2.4	Oppervalkte berekeningen (voor niet vlakke oppervlakken) . .	11

Hoofdstuk 1

Reële functies van twee variabelen

1.1 Partieel afleiden

1. Bepaal de partiële afgeleiden van eerste orde van $z = ye^x - 3x + y^4$ in het punt $(0, 1)$.
2. Bepaal de partiële afgeleiden van eerste orde van $z = \ln(x^y) - xy$ in het punt $(1, 1)$.
3. Bereken de richtingsafgeleide $D_{\vec{u}}f(\vec{a})$ in de volgende gevallen:

- (i) $f(x, y) = \text{bgtg} \frac{x}{y}$, $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{u} = (-1, 3)$;
- (ii) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$, $\vec{a} = (0, 0)$ en $\vec{u} = (1, 2)$;
- (iii) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $\vec{a} = (1, 1)$ en $\vec{u} = (-1, 3)$.

4. Bereken de partiële afgeleiden van eerste orde van de functie

$$f(x, y) = \sqrt{(3x - y)(y - x^2)}.$$

5. Bepaal het domein en de partiële afgeleiden van eerste orde van de functie

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{\ln[(x - 1)^2 + y^2 - 4]}{y - x}}.$$

6. Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(x)$ en $x(u, v) = u^2 + uv + v^2$. Bepaal de eerste orde partiële afgeleiden van $G(u, v) = f(x(u, v))$.

7. Gegeven zijn de functies $f(x, y) = x^2 - y^2$, $x(t) = \cos(t)$ en $y(t) = \sin(t)$. Zij $G(t) = f(x(t), y(t))$. Bereken de afgeleide van $G(t)$.
8. Bepaal op twee manieren de eerste orde partiële afgeleiden van de samengestelde functie $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ waarbij $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$, $x(u, v) = u + v$ en $y(u, v) = u - v$.
9. Bepaal een vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van de functie $f(x, y) = xy \ln(x)$ in het punt op de grafiek waarvoor $x = 1$ en $y = 2$.
10. Vind de helling van de twee raaklijnen in het punt $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ aan het oppervlak bepaald door $z = 3x^2 + 4y^2 - 6$: de raaklijnen zijn evenwijdig respectievelijk met het xz ($y = \text{constant}$) en het yz vlak ($x = \text{constant}$).
11. Bepaal de eerste orde en tweede orde partiële afgeleiden van de volgende functies $z = f(x, y)$:
 - (a) $z = yx^2 + 2xy^2$;
 - (b) $z = 2 \ln x + 3 \ln y$;
 - (c) $z = y^x$;
 - (d) $z = \arctan(\sqrt{x - y})$.
12. Vind de eerste orde partiële afgeleiden van z en gebruik die om de helling van de raaklijnen op te stellen aan de bol met vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ in de punten $(0, 0, 5)$, $(0, 0, -5)$, $(0, 5, 0)$ en $(0, 5\frac{\sqrt{2}}{2}, 5\frac{\sqrt{2}}{2})$. Maak ook een schets. Stel de vergelijking op van het raakvlak in het punt $(0, 5\frac{\sqrt{2}}{2}, 5\frac{\sqrt{2}}{2})$.

1.2 Totaal differentiaal

1. Bereken de totale differentiaal van

$$f(x, y) = x \ln y + y \ln \frac{\sin x}{\sin y}.$$

2. Zoek een lineaire benadering, via de totale differentiaal, van de oppervlakte van een rechthoek met lengte x en breedte y , die dicht bij $x = 35$ m en $y = 25$ m liggen. Bereken als voorbeeld voor lengte $\times$ breedte $= 35,02\text{m} \times 24,97\text{m}$. Vergelijk ook met de juiste waarde.

1.3 Extremum onderzoek

Bepaal het definitiegebied en de eventuele maxima, minima en zadelpunten van de volgende functies

1. $f(x, y) = (x^2 - 3y)^2 e^{-y}$;
2. $f(x, y) = (x + 1)^2 \ln(1 + y^2)$;
3. $f(x, y) = 2(a - 3)x^2 - y + (a^2 - 4a - 5)y^2$, met $a \in \mathbb{R}$;
4. $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{\frac{-x^2 - y^2}{2}}$;
5. $f(x, y) = x^3 + 6xy^2 - 2y^3 - 12x$;
6. $f(x, y) = x^2y + xy^2$;
7. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2}$. Plot de functie met MatLab.
8. $f(x, y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3y^3 - 150x$;
9. $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$;
10. $f(x, y) = xy \exp\left(\frac{-(x^2 + 4y^2)}{8}\right)$;
11. $f(x, y) = y\sqrt{1 - x} - x\sqrt{1 + y}$.

1.4 Toepassingen

1. Een labo produceert twee soorten ijscrème, *Dolce* en *Amaro*. Als in één week, x kg van het type *Dolce* en y kg van het type *Amaro* geproduceerd worden, is de totale kost

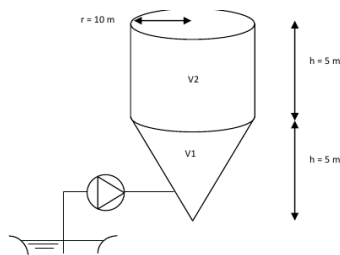
$$C(x, y) = 600 + 200x + 200y - 2x^2y.$$

Is het mogelijk om de wekelijkse kost te minimaliseren met een totale productie van beide ijscrèmes lager dan 300 kg?

2. Een bedrijf wil een nieuwe loods bouwen in de vorm van een parallelipedum met een capaciteit van 4000 m³. Een dergelijke constructie heeft geen fundamenteen nodig, de kost voor het dak is 20 Eur per m² en de kost van de zijwanden is 160 Eur per m². Welke afmetingen minimaliseren de kosten?

3. Een open doos met een rechthoekig grondvlak moet een bepaald volume V bevatten. Wat zijn de optimale afmetingen van de doos zo dat men zo weinig materiaal mogelijk nodig heeft om de doos te maken?
4. Het elektrisch vermogen verbruikt in een weerstand bedraagt $P = EI = E^2/R$. Als $E = 200$ Volt en $R = 8$ Ohm, hoeveel verandert het vermogen dan als de spanning E met 5 Volt vermindert en de weerstand met 0,2 Ohm vermindert?
5. Van een driehoek werden 2 zijden gemeten en de ingesloten hoek : 150 m, 200 m en 60° . Als de meetfout 0,2 m en 1° voor de hoek bedragen, wat is dan de grootste fout op de oppervlakte ?
6. Een watertoren (zie schets) is leeg en moet gevuld worden met water via een pomp. Men wenst de toren te vullen op een manier dat het waterniveau stijgt met constante snelheid : $V1$ moet gevuld zijn na 20 minuten en $V2$ na 40 minuten. De vraag is hoe het debiet (te berekenen in m^3/uur , of volume verandering per tijdseenheid) van de pomp moet verlopen tijdens het vullen (i.f.v. de tijd).

Ter info : het volume van een kegel wordt berekend als $V = \frac{1}{3}\pi hr^2$, met h de hoogte en r de straal van het basisvlak.



7. De produktiviteit van een bedrijf wordt bij benadering beschreven door de *Cobb-Douglas* functie:

$$f(x, y) = 40x^{0.3}y^{0.7},$$

waarbij x de arbeidbelasting in eenheden voorstelt en y de eenheden kapitaal.

- (a) bereken $f_x(x, y)$ en $f_y(x, y)$;
- (b) als het bedrijf werkt met een arbeidslast van 1500 eenheden en een kapitaal van 4500 eenheden, vind de marginale produktiviteit van arbeid en marginale produktiviteit van kapitaal. Interpreteer de resultaten.

8. In ideale omstandigheden, als een persoon die auto aan het rijden is, plots remt en tot halte komt, wordt de lengte van de 'rem-streepen' op de grond gegeven door (in *feet*) ;

$$L(x, y) = kxy^2,$$

waarbij k een constante is, x het gewicht van de auto in *pounds*, y de snelheid van de auto in *mijlen/uur*. Voor $k = 0.0000133$ vind $L_x(2.500, 60)$ en $L_y(2.500, 60)$ en interpreteer de resultaten.

9. Een bedrijf wordt gevraagd om een rechthoekige doos te ontwerpen met twee gelijke vakken zonder deksel. Het totale volume van de doos moet 48 inches³ zijn. Vind de afmetingen van de doos die de hoeveelheid materiaal, nodig om de doos te produceren, minimalizeren.

1.5 Opmerkingen

1. De betekenis van een partiële afgeleide is analoog aan die van een afgeleide. Hij geeft informatie over de lokale verandering van de functie in een punt. Voor een functie van twee variabelen geldt dit nog steeds, maar dan bij constant houden van de andere variabele.
2. Door een partiële afgeleide als functie nogmaals partieel af te leiden, bekomen wij (gemengde) tweede-orde partiële afgeleiden.
3. De functies f_{xy} en f_{yx} zijn doorgaans verschillend, een voldoende voorwaarde voor hun gelijkheid in een punt is de inhoud van de stelling van Clairaut.

Zij $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Als de functies f_{xy} en f_{yx} bestaan en continu zijn in een omgeving van een punt $(x_0, y_0) \in \text{dom} f$, dan is

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

4. Niveaукrommen van een functie $f(x, y)$ zijn krommen in het vlak waarop de functie $f(x, y)$ dezelfde waarde heeft: ze voldoen aan een vergelijking van de vorm $f(x, y) = c$, waarbij c een constante is.
Als voorbeeld, denk aan de hoogtelijnen op een topografische kaart, dus $z = \text{hoogte}(x, y)$, is een functie waarvan de niveaукrommen hoogtelijnen genoemd worden. Een ander gekend voorbeeld zijn de isobaren op weerkaarten.

5. (a) Ketting regel voor $f(x(u, v))$ van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}$ (compacte notatie):

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{df}{dx} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{df}{dx} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

- (b) Ketting regel voor $F(x(t), y(t))$ van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ (compacte notatie):

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

- (c) Ketting regel voor $f(x(u, v), y(u, v))$ van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}$ (compacte notatie):

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

6. Een vergelijking van het raakvlak door een punt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ aan de grafiek van $f(x, y)$ is

$$z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

7. Zij $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ een richtingsvector (d.w.z. $\|\mathbf{v}\| = 1$) in het domein van $f(x, y)$. De richtingsafgeleide van f in de richting van $\mathbf{v}$ berekenen we als volgt

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial f}{\partial x} v_1 + \frac{\partial f}{\partial y} v_2$$

8. De gradiënt van een functie is

$$\nabla f(x, y) = \vec{\text{grad}} f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Deze geeft voor ieder punt (x, y) in het domein van de functie $z = f(x, y)$ een vector aan. De vector $\nabla f(x_0, y_0)$ wijst in de richting waarin de grafiek van $f(x, y)$ in het punt (x_0, y_0) het snelste toeneemt. De lengte van $\nabla f(x_0, y_0)$, $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$, is dus een maat voor de maximale steilheid van de grafiek van de functie $f(x, y)$ in (x_0, y_0) . Een balletje dat op het oppervlak met vergelijking $z = f(x, y)$ wordt gelegd begint te rollen in de richting van $-\nabla f(x, y)$.

De richting in dewelke een functie in een punt (x_0, y_0) niet wijzigt is precies de raaklijn aan de niveaукromme door (x_0, y_0) . Deze richting staat loodrecht op de gradiënt van de functie in (x_0, y_0) .

Hoofdstuk 2

Dubbel integralen

2.1 Opmerking: het bepalen van de integratiegrenzen in dubbelintegralen

De algemene aanpak begint met het tekenen van het gebied in het (x, y) -vlak. Vervolgens trekken we een verticale of horizontale hulplijn, waarvan we de grenzen aflezen.

Bv., als we eerst naar y integreren (hulplijn is verticaal!), dan hangen de integratiegrenzen af van x : het zijn functies $c(x)$ en $d(x)$ die de vorm beschrijven van het gebied waarover wordt geïntegreerd. De daarop volgende integratie naar x heeft dan vaste grenzen a en b :

$$\int \int_G f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Voorbeeld Beschouw in het x, y -vlak de driehoek G begrensd door de x -as, y -as en de rechte $y = \frac{1}{2}(1 - x)$. Bereken

$$\int \int_G (x + y^2) dx dy.$$

Oplossing. We integreren eerst naar x en kiezen dus y vast. Na het trekken van een horizontale lijn (rechte $y = \text{constant}$) in de figuur, kunnen we de grenzen voor x aflezen: de ondergrens voor x is $y = 0$ (onafhankelijk van y) en de bovengrens is de waarde van x op de schuine zijde van de driehoek, $x = 1 - 2y$. De grenzen van y zijn 0 en $\frac{1}{2}$. We krijgen dus:

$$\int \int_G (x + y^2) dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{1-2y} (x + y^2) dx \right) dy = \frac{3}{32}.$$

Bij het omkeren van de integratievolgorde moeten ook de grenzen anders worden gekozen. Hier hebben we het volgende. Voor vaste x tekenen we een verticale lijn in de figuur en vinden we dat de grenzen voor y zijn 0 en $\frac{1}{2}(1-x)$. De grenzen voor x zijn 0 en 1. Dus,

$$\int \int_G (x + y^2) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)} (x + y^2) dy \right) dx = \frac{3}{32}.$$

2.2 Opgaven

1. Bereken de volgende integralen. Maak een plaatje van het integratiegebied in het x, y -vlak. Verwissel de integratievolgorde en controleer het resultaat.

(a) $f(x, y) = \sin(x + y)$ over de driehoek tussen de lijnen $y = 0$, $y = x$ en $y + x = 2$

(ii) $F(x, y) = e^{-x^2}$ over de driehoek ingesloten door $y = 0$, $y = 2x$, en $x = 2$

2. Wissel de integratievolgorde om.

$$\int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy.$$

3. Beschouw $\int \int_D f(x, y) dx dy$ met D het gebied binnen de cirkel

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$$

en rechts van de parabool

$$(y - 1)^2 = 1 - 2x.$$

- (a) Schrijf deze dubbele integraal als een som van herhaalde enkelvoudige integralen van de vorm

$$\int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy.$$

Duid op een figuur duidelijk de deelgebieden van D aan die je gebruikt.

- (b) Bereken de integraal als $f(x, y) = y^2(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$ gebruik makend van poolcoördinaten.

4. Beschouw een dunne plaat in de vorm van de puntenverzameling

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, 2x \geq 1 - y^2\}.$$

Als $f(x, y)$ de massa per oppervlakteëenheid geeft in het punt (x, y) , wordt de totale massa M van de plaat gegeven door

$$M = \int \int_D f(x, y) dx dy.$$

- (a) Schrijf deze dubbele integraal als een som van herhaalde enkelvoudige integralen van de vorm

$$\int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy.$$

- (b) Wat wordt de integraal na transformatie naar poolcoördinaten?
 (c) Gesteld dat de massa per oppervlakteëenheid gegeven wordt door

$$f(x, y) = q(x^2 + y^2)^{-2},$$

met q een constante, bereken de coördinaten $\bar{x}, \bar{y}$ van het massamiddelpunt van de plaat:

$$\bar{x} = \frac{\int \int_D x f(x, y) dx dy}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\int \int_D y f(x, y) dx dy}{M}.$$

5. Schets het integratiegebied en bereken de volgende dubbele integralen:

(a) $\int_0^1 \int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}} y \, dx \, dy.$

(b) $\int_0^1 \int_{2y}^2 \cos(x^2) \, dx \, dy.$

6. Bereken de dubbele integraal van $f(x, y)$ over het deel van het vlak R begrensd door de gegeven krommen.

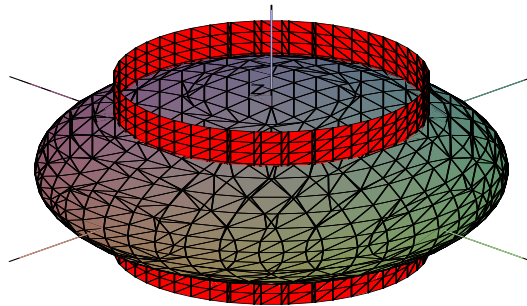
(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, met $R : x = 0; x = 2; y = 0; y = 1.$

(b) $f(x, y) = y \ln(x)$, met $R : x = 1; x = e; y = \sqrt{x}; y = 2.$

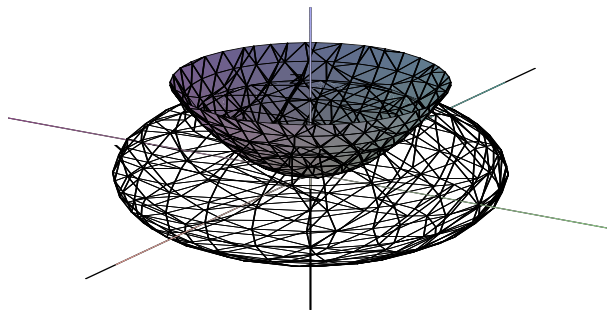
(c) $f(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$, met $R : x^2 + y^2 = 1; x^2 + y^2 = 9; y = \frac{x}{\sqrt{3}}; y = x\sqrt{3}.$

2.3 Volume berekeningen voor cilindervormige lichamen

1. Bereken de inhoud van het gedeelte van de ruimte buiten de kegel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ en binnen de bol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
2. Zij D het gedeelte van de bol, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, dat overblijft na het boren van een cilindervormige gat met straal 2 door het centrum. Vind het volume van D
Stel dan een integraal op, zonder die uit te rekenen, om de oppervlakte van het overblijvend oppervlak van de bol te berekenen.

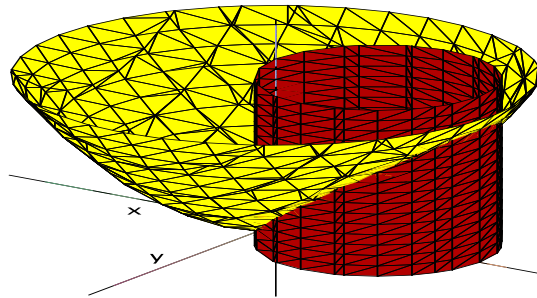


3. Zij D het gedeelte van de ruimte tussen de bol $\mathcal{B} : x^2 + y^2 + z^2 = 6$ en de parabolöide $\mathcal{P} : z = x^2 + y^2$. Stel de integralen op om de inhoud van D zowel cartesisch als via poolcoördinaten te berekenen. Reken vervolgens één van de twee integralen uit.

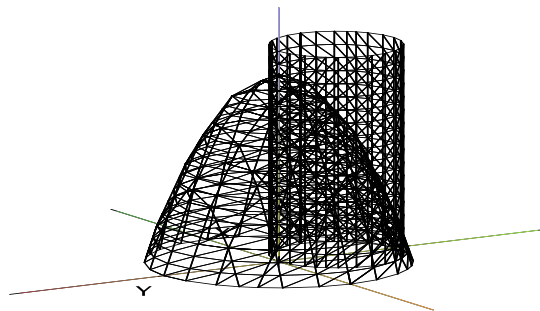


4. Zij D het lichaam begrensd door het xy -vlak, $\Pi : z = 0$, de parabolöide, $\mathcal{P} : x^2 + y^2 = 2z$, en de cilinder, $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 4x$. Stel de integralen op om de inhoud van D zowel cartesisch als via poolcoördinaten te berekenen. Reken vervolgens één van de twee integralen uit.

2.4. OPPERVALKTE BEREKENINGEN (VOOR NIET VLAKKE OPPERVLAKKEN)11



5. Zij D het lichaam begrensd door het xy -vlak, $\Pi : z = 0$, de parabolöide, $\mathcal{P} : z = 4 - x^2 - y^2$, en de cilinder, $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 2y$. Stel de integralen op om de inhoud van D zowel cartesisch als via poolcoördinaten te berekenen. Reken vervolgens één van de twee integralen uit.

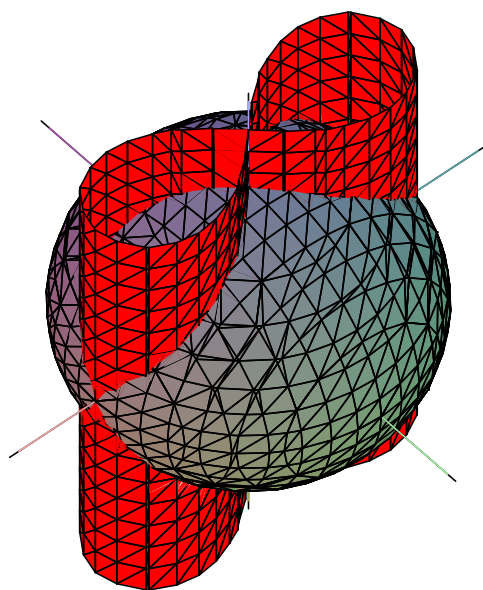


2.4 Oppervalkte berekeningen (voor niet vlakke oppervlakken)

1. Bepaal de oppervlakte van de bolschil afgesneden op een bol met straal 4 en gelegen tussen de horizontale vlakken $z = 0$ en $z = 2$.
2. Beschouw het lichaam begrensd tussen de kegel $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ en de cilinder $x^2 + y^2 = 2y$. Bereken de inhoud (met poolcoördinaten), stel ook 2 integralen op om de inhoud cartesisch te berekenen. Bereken de oppervlakte van het lichaam (volledig).
3. Vind de oppervlakte van het deel van de kegel $x^2 + y^2 = 3z^2$ gelegen boven het xy -vlak en binnen de cilinder $x^2 + y^2 = 4y$.
4. Vind het oppervlak van het deel van de sfeer $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ gelegen buiten de parabolöide $x^2 + y^2 + z = 16$.

5. Bereken de oppervlakte van het gedeelte van het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ dat binnen de cilinder met vergelijking $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$ gelegen is.

Opmerking: Het Lemniscaat van Bernoulli $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$ is te schrijven in poolvorm als $r = 2\sqrt{\cos 2\theta}$.



Figuur 2.1: Cilinder op Lemniscaat en boloppervalk

2.4. *OPPERVALKTE BEREKENINGEN (VOOR NIET VLAKKE OPPERVLAKKEN)*¹³

De oefeningen in dit bundeltje zijn geïnspireerd op en/of bevatten oefeningen uit de volgende werken.

Bibliografie

- [1] G.Aletti, G.Naldi, L.Pareschi. MATLAB: concetti e progetti. Ed.Apogeo 2002.
- [2] L. V. Fausett. Applied Numerical Analysis using Matlab. Second edition, Pearson, Prentice Hall, 2008.
- [3] W. Gander, J. Hrebicek. Solving problems in scientific computing using Maple and Matlab. Fourth edition, Springer, 2004.
- [4] Demidovich
- [5] Smirnov
- [6] Apostol, T.M. (1967). Calculus: Volume I. Blaisdell Publishing Company, Walham, Massachusetts.
- [7] Lynch, R.V., Ostberg, D. R. en R. G. Kuller (1973). Calculus, with computer applications. Xerox College Publishing, Lexington, Massachusetts.
- [8] Salas, S. L. en Hille E. (1990). Calculus: one and several variables. John Wiley & Sons, Inc.
- [9] L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni. Complementi di matematica 2. Analisi matematica per I.T.G. ETAS libri, 1992.
- [10] T. Finney. Calculus. Addison Wesley, 1998.
- [11] wiskunde in werking. Epsilon
- [12] groene boek met derive